数理解析研究所講究録
592巻 1986年 136-144

発散する形式解の特徴づけについて

都立大学　吉野正史 (Masafumi Yoshino)

§1. Introduction.

$x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ を変数 $\partial=(\partial_1,\cdots,\partial_d)$ ここで $\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\cdots,d$ とおく。multi-index $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$, $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ に対し $(x\cdot\partial)^\alpha=(x_1\partial_1)^{\alpha_1}\cdots(x_d\partial_d)^{\alpha_d}$ とおく。$\lambda\in\mathbb{C}^d$ を与え固定する。このとき次の方程式の形式解 $u(x)=x^\lambda\sum_{\eta\in\mathbb{N}^d}v_\eta x^\eta/\eta!$ で収束しないものの意味づけについて考える。

$$(1.1)\quad P(x;x\cdot\partial)u\equiv\Big(\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x\cdot\partial)^\alpha+\sum_{|\beta|\leq m-1}b_\beta(x)(x\cdot\partial)^\beta\Big)u(x)=x^\lambda f(x)$$

ここで $m\geqq 1$ は自然数, a_α は複素定数, $b_\beta(x)$ は $x=0$ で解析的、$f(x)$ は与えられた原点で解析的な関数とする。

(1.1)において $d=1$ すなわちFuchs型の常微分方程式のときは、よく知られているように (1.1)の形式解は収束する。ところが $d\geqq 2$ ではこの事実は成立しない。実際、

適当な条件下で ある $f(x)$ に対して (1.1) の形式解で発散するものが存在する。（[6] 参照）。実際このような発散する形式解をもつ方程式の集まりは，次のような２つの class に分けることができる。１つは、無限次元の kernel をもつような方程式であり，他方は、small denominator がおこるような方程式である。前者の典型的な例は、方程式 $(x_1\partial_1 - \tau x_2\partial_2)u = f(x)$，$\tau>0$, 有理数 であり 後者の例はこの方程式で $\tau>0$ を無理数とした方程式である。前者については明らかであるが後者についても、次のような事実を示すことができる。 ある $\tau>0$, irrational と entire function $f(x)$ に対し この方程式は 次のような評価をもつ形式解

$$u(x) = \sum_{\eta\in\mathbb{N}^2} u_\eta x^\eta \quad をもつ。\quad |\eta|!^{s}/|u_\eta| \to 0 \quad (|\eta|\to\infty)$$

$s = 1, 2, \cdots$. この形式解は factorial の order よりも速く増大する。このような悪い behavior をもつ形式解をもつような方程式とそうでない方程式を区別するような条件は、今の方程式に関しては τ に対する diophantine 条件で与えることができるが、それは単純ではない。この例からもわかるように、もっと広いクラスのより一般的な方程式を扱おうとすれば、対応する条件は一層複雑になる。（[5] [6] 参照）。そしてこのような条件をみたさない方程式はやはり発散する

形式解をもつ。従ってすべての形式解が analytic functions のはんいで意味がつくような方程式とそうでない方程式を区別するための diophantine 条件をもう一度とらえなおす必要がある。形式解を意味づける関数のクラスによってこの条件はどのような形に、なるのであろうか。又上であらわれた形式解で発散するものに意味を与えるということも興味深い問題である。

ここでは，形式解を analytic functions の category で考えるかわりに、C^∞ function の category で考える。そうすると状況は非常に単純である。すなわち，すべての形式解はある C^∞ 解の漸近展開になっている。しかも、もし形式解が収束していればこの C^∞ 解は実は解析的である。ここで個々の方程式の diophantine 条件は、全く関与してこないことに注意する。さらにこの結果は $d=2$ の場合にはかならずしも確定型でない方程式に対しても成立する。

§2. Notations and results.

(1.1) の中の $b_\beta(x)$ をテイラー展開する。

$$b_\beta(x) = \sum_\gamma b_{\beta,\gamma}\, x^\gamma/\gamma!\,.$$

そして Γ_0 を　ある β に対して $b_{\beta,\gamma} \neq 0$ なるすべての γ を含

むような原点を頂点とする最小の閉凸錐とする。 $p(\eta)$ を次によって定義する。

(2.1) $$p(\eta)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \eta^\alpha + \sum_{|\beta|\leqq m-1} b_\beta(0)\eta^\beta .$$

さらに $p(\eta)$ の m 次斉次部分を $p_m(\eta)$ とかく。このとき次の4つの条件を仮定する。

(A.1) $p_m(\xi)=0$ なる各 $\xi\in\mathbb{R}^d$ に対し

$$\omega\cdot\nabla p_m(\xi)\neq 0 \quad \text{for all} \quad \omega\in\Gamma_0,\ |\omega|=1$$

が成立する。

(A.2) 空でない凸な錐 $\tilde{\Gamma}_0\supset\Gamma_0$ で頂点を原点にもつもので次の条件を満足するものが存在する。

$$p_m(\omega+i\xi)\neq 0 \quad \text{for all } \omega+i\xi\in\tilde{\Gamma}_0\setminus\{0\}+i\mathbb{R}^d.$$

(A.3) $|\omega|=1$, $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_d)\geqq 0$, $\omega_\nu=0$ for some ν, $1\leqq\nu\leqq d$ なるすべて $\omega\in\mathbb{R}^d$ に対し $p_m(\omega)\neq 0$ が成立する。

(A.4) $\tilde{\Gamma}_0$ は開球を含む。

以上の条件下でここでの主な結果は次の定理である。

定理2.1. 条件(A.1)〜(A.4)を仮定する。さらに方程式(1.1)は形式解 $\tilde{u}(x)=x^{\lambda}\sum_{\eta\in\mathbb{N}^d}\tilde{v}_\eta x^\eta/\eta!$ をもつとする。このときある $v(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在して $u(x)\equiv v(x)x^\lambda$ は原点のある近傍で方程式(1.1)をみたし しかも $k=0,1,2,\cdots$ に対して次が成立する。

(2.2) $$v(x)-\sum_{|\eta|\leqslant k}\tilde{v}_\eta x^\eta/\eta! = O(|x|^{k+1}) \quad \text{as } |x|\to 0.$$

注意2.1. もし形式和 $\tilde{u}(x)x^{-\lambda}$ が $x=0$ の近傍で収束すれば $v(x)$ はこの和に等しい。従って特に解析的となる。

注意2.2. もし $\Gamma_0\neq\phi$ であれば(A.1)より特性根が distinct ということが従う。この条件をかならずしも満足しない場合として(A.1)は次のように特性根がなめらかな場合に弱めることができる。$\lambda=0$ の場合に述べる。($\lambda\neq0$ でも対応する条件を述べることは困難ではない。) $L_\xi(\omega)$ を P_m の ξ における localization とする。すなわち $P_m(\xi+s\omega)$ を s の多項式とみて展開したとき s についての巾が最も低い項の係数が $L_\xi(\omega)$ である。$L_\xi(\omega)$ の ω についての次数を σ とする。そのとき定理2.1において(A.1)は $\omega\cdot\nabla P_m(\xi)$ のかわりに $L_\xi(\omega)$ とし (A.2)〜(A.4)を仮定し (1.1)で $|\beta|\leqslant m-1$ のかわりに $|\beta|\leqslant m-\sigma$ とすれば定理2.1は成立する。

<u>注意2.3</u>. もし条件(A.4)が成立しないときは定理2.1は次のように修正すればよい。

一般性を失うことなく cone $\tilde{\Gamma}_0$ は $d-\nu$ 次元の空間 $\{\eta\in\mathbb{R}^d;\ \eta=(\eta_1,\cdots,\eta_d),\ \eta_1=\eta_2=\cdots=\eta_\nu=0\}$ の中の開集合であるとする。そのとき 次のような $v(x)$ が存在して $x^\lambda v(x)$ は原点の近傍から $\{x_1=x_2=\cdots=x_\nu=0\}$ をのぞいたところで方程式 (1.1)の解である。$v(x)=v_1(x)+v_2(x)$ であり $v_1(x)$ は C^∞ であり (2.2)をみたし $v_2(x)$ は $x_j=0$ $(j=\nu+1,\cdots,d)$ 上で flat かつ 点 x が 平面 $\{x\in\mathbb{R}^d;\ x_j=0\}$, $1\leqslant j\leqslant\nu$ に含まれないところから原点に近づくとき flat である。又 $v_2(x)$ は $\{x\in\mathbb{R}^d;\ x_j=0\}$, $1\leqslant j\leqslant\nu$ 以外の点では C^∞ である。

<u>注意2.4</u>. 定理2.1は形式解 $\hat{u}(x)$ が $\log x_j$, $j=1,\cdots,d$ の巾を含んでいるときにも成立する。このような形式解は常微分方程式の Frobenius の方法を適用することによって得られる。実際この場合、対数項を含まない項には定理2.1が適用され対数項を含む項は $\prod_j(\log x_j)^{\nu_j}\times$($x$の解析関数) という形をしていることがわかる。

もっと一般にすべての負巾を含んでいるような形式解を考えることもできる。たとえば $\lambda=0$ としさらに対数項があらわれるのを防ぐために $P(k+\lambda)\neq 0$ $\forall k\in\mathbb{Z}^d$ としよう。このとき $\hat{u}(x)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^d}u_\eta x^\eta/\eta!$ が (1.1)の形式解であれ

ば $u_\eta=0$, $\eta\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathbb{N}^d$ が成立する。従って定理2.1の場合に帰着される。

注意2.5. $\lambda=0$ とする。そのとき定理2.1によって、もし(1.1)が発散する形式解をもてば、(1.1)の解で、解析的でないようなものが存在する。従って、もし(1.1)が analytic-hypoelliptic であれば、(1.1)のすべての形式解は収束である。

逆は成立しない。実際それは定理2.1における $v(x)$ が一般に一意とはかぎらないからである。そのような例としては P として方程式 $P(x\cdot\partial)=\prod_j(x_1\partial_1-\tau_j x_2\partial_2+c_j)$ をとればよい。ここで、$\tau_j>0$, c_j は適当な定数である。実際 $v(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $v\neq0$ で $Pv=0$ かつ $v(x)$ は $x_1=0$ あるいは $x_2=0$ で flat となるような $v(x)$ が存在する。

$d=2$ の時、定理2.1は、非常に簡単になる。それは次のように、述べられる。

系2.2. $d=2$ かつ次の条件を仮定する。

(2.3) $P_m(\omega)\neq0$ for $\omega=(1,0)$ and $(0,1)$

(2.4) $P_m(\omega)\neq0$ for all $\omega\in\Gamma_0$ かつ方程式 $P_m(z,1)=0$ は z の方程式として実の相異る根をもつ。

このとき、定理2.1と同じ結論が成立する。

証明. 条件 (2.3) は (A.3) と同値になり (2.4) は (A.1), (A.2) と同値になる。(A.4) は (2.3) (2.4) より従う。　q.e.d.

(2.4) の根が相異るという仮定は Levi 条件でおきかえることができる。

References

[1] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, *Cauchy problems with characteristic initial hypersurface*, Comm. Pures Appl. Math., 114 (1973), 455–475.

[2] J. Leray, *Caractère non fredholmien du problème de Goursat*, J. Math. Pures Appl., 53 (1974), 133–136.

[3] J. Leray et C. Pisot, *Une fonction de la théorie des nombres*, J. Math. Pures Appl., 53 (1974), 137–145.

[4] M. Kashiwara, T. Kawai and J. Sjöstrand, *On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge*, Ark., für Math. 17 (1979), 83–91.

[5] M. Yoshino, On sufficient conditions for convergence of formal solutions, Proc. Japan Acad., Ser. A, 61 (1985), 259 − 261.

[6] M. Yoshino, On diophantine properties for convergence of formal solutions, Proc. Japan Acad., Ser. A, 62 (1986), 49 − 51.

吉野正史

〒158 世田谷区深沢 2-1-1

都立大学理学部数学